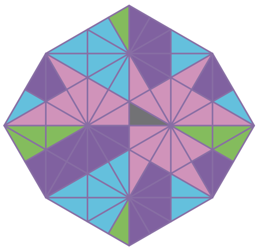
幅広い分野をカバーする研究

数理学科(多元数理科学研究科)には現在60名程の研究者がおり、発展し続けている現代数学の幅広い分野をカバーしています。そして、学内だけでなく国内外の研究者たちと連携して最先端の研究が行われています。それらは単に代数系、幾何系、解析系、物理系、応用系と分かれているのではなく、互いに関連しあい、その結びつきが各分野の発展を促し、目覚ましい成果をあげています。ここでは様々な研究分野の中から10個を選び、紹介します。

代数群、量子群およびヘッケ環の表現論



G2型アフィン・ワイル群のセル構造

種々の数学的対象を調べるために、その対象に作用する適当な群や環を取り出してその性質を調べるのが有効です。表現論の役割は、これらの群や環を、線形空間への作用としての表現を通じて研究することにあります。その扱う対象によって表現論は、代数、幾何、解析あるいは、数理物理などの多くの分野とダイナミックに関係し、研究方法もそれに応じて多彩です。タイトルにあげたものはすべて、ワイル群と呼ばれる簡単な構造を持った群を骨格にして出来ており、ディンキン図形(A型からG型までである)に関連する表現論ということもできます。表現の基本的な単位である既約表現を、このような群や環の場合に記述するのが主要な目標です。

多様体のゼータ関数とモチーフ

整数論の中心的な研究対象としてリーマンのゼータ関数があります。20世紀後半、整数論は代数幾何学と融合し、多様体のゼータ関数というものが生まれました。多様体のゼータ関数の特別な場合である楕円曲線のゼータ関数は、谷山・志村予想やフェルマーの最終定理のような整数論の深い問題と大いに関係があります。これらの他にも、多様体のゼータ関数の研究から、エタールコホモロジーやモチーフといった新しい概念や考え方が生まれました。近年、代数幾何学は代数的位相幾何学(ホモトピー論)と融合し、これによってモチーフの理論は大きな発展を遂げています。

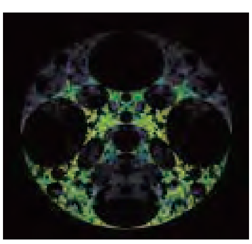
$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} hR}{w\sqrt{|d_K|}}$$

デデキンドゼータ関数の解析的類数公式

トポロジーと微分方程式

トポロジーとは、粗くいうと“柔らかい幾何学”です。図形(多様体などの位相空間)を連続的に変形させたときに保たれる量を調べることによって、幾何学を調べる分野です。トポロジーは多くの分野と接点を持っています。例えば、アティヤ・シンガーの指数公式というものがあります。これは、多様体上の線型偏微分方程式から決まるある量を、トポロジー的な量(特性類)で書き表す公式で、解析学とトポロジーを結んでいます。この公式はトポロジーへの様々な応用があります。さらに現在では、物理に由来する非線形な偏微分方程式をトポロジーに応用することが盛んに行われ、思いもよらない定理が証明されたり、未解決問題が解かれたりしています。

双曲幾何とクライン群

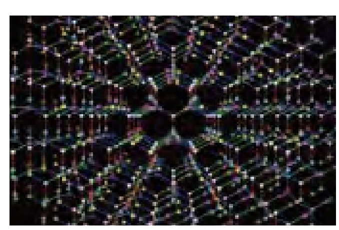


4次元クライン群の極限集合

平面のようなユークリッド幾何では平行線の公理を仮定していますが、それを満たさない幾何として双曲幾何があります。この馴染みのない幾何は、しかし、数学の世界における図形(多様体)を考えるときはむしろ多数派に属します。双曲幾何の構造を持つ多様体(双曲多様体)に対応するクライン群の極限集合は自己相似の構造を持つフラクタル図形になります(図参照)。従って双曲多様体の変形がフラクタル図形の変形を意味するのですが、驚くべきことにこの双曲多様体の変形空間(双曲多様体たちが住む世界の地図)の境界は再びフラクタル構造を持つのです。この不思議な対応の根底に潜む原理を明らかにしたいと日々研究しています。

変分問題と結晶格子

物理現象を記述する基本的な言葉として「最小作用の原理」または「変分原理」と呼ばれる考え方があります。変分原理とは、物理法則はエネルギーを最小とする「方程式」によって記述されるという考え方であり、ニュートンの運動方程式もその裏側には変分原理が存在しています。自然界に存在する結晶の形も例外ではなく、変分原理から導かれる調和写像によって結晶の形を決定することができます。この指針によって砂田氏が発見した新しい結晶格子(K4 格子)による炭素結晶について、数値計算を用いてその物理的性質を調べる研究や、高次元での対称性の高い結晶格子の存在についての研究を行っています。



K4格子

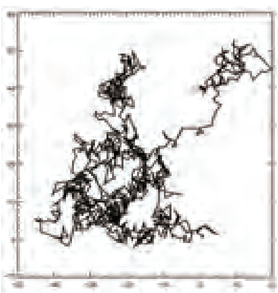
非線形分散型方程式

非線形分散型方程式は、非線形光学、プラズマ物理、水面波の研究など物理や工学の様々な分野に現れる偏微分方程式です。代表的なものとしては、非線形シュレディンガー方程式、KdV方程式、ベンジャミン・小野方程式などがあります。これらの方程式の線形部分が持つ分散性と非線形項が持つ集約効果のバランスにより、解の散乱、爆発、安定な孤立波解の存在、などの面白い現象が起こる事が知られています。ここ30年で、変分法的手法、ストリッカルツ型評価式、ブルガン空間、I-メソッドなどの様々な道具が開発されました。しかし現在もなお未解決問題が多く残されており、日仏米の研究者により活発に研究がなされています。

$$i\,\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1}u$$
$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0$$
$$\partial_t u + H\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0$$

上から順に、非線形シュレディンガー方程式、KdV方程式、ベンジャミン・小野方程式

ブラウン運動やランダムウォーク



平面を動くブラウン運動

確率論はランダムな現象の数理を調べる分野です。特に確率過程と呼ばれる、何らかの空間の中を動くランダムな運動を研究することが盛んです。そのなかでもっとも重要なのは、水中を動く花粉粒子の運動の数学的モデルとして生まれたブラウン運動だといえます。もう少し素朴なものとして、コインを投げて表が出たら右上に進み、裏が出たら右下に進む、という動きを考えると、これはランダムウォークと呼ばれる確率過程です。実はランダムウォークはブラウン運動の離散版だといえ、ランダムウォークの連続極限をとったものがブラウン運動だといえます。現代の確率論においては、ブラウン運動やランダムウォークの汎関数は、純粋数学としてよく研究されているだけでなく、膨大な応用もあります。

超弦理論、素粒子論、数理物理学

物理学と数学は、20世紀以前から、ニュートン力学と微積分、アインシュタインの一般相対論とリーマン幾何学、ファイバー束とゲージ理論のように、互いに密接に刺激し合いながら相補的に発展してきた面があります。この流れは21世紀になった現在も続いていますが、特に素粒子の超弦理論においてそれが顕著であり、ミラー対称性、超対称ゲージ理論、Dブレーンの研究を通じて、次々に新しい数学が生み出されています。弦理論はまだまだ発展途上であり、その数理構造についても未知の部分がたくさんあります。これからも22世紀以降も、物理学と数学双方に、驚くべき知見と実りある交流をもたらし続けることでしょう。

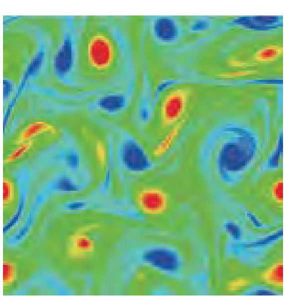
$$\begin{cases} [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] \\ \qquad\qquad + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta \\ [B_1, B_2] + IJ \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

ADHM方程式（数学・物理学の協同成果の一つで、インスタントンの本質を記述している）

理論計算機科学

計算機は工学と思われがちですが、私たちが生まれる前から数学的対象として研究されてきました。1930年代に考案されたチューリング機械は計算可能な関数が何であるかを形式化するために作られ、定理の証明が自動化できないことを裏付けました。同じ頃に作られたラムダ計算と型理論は安全なプログラミング言語の設計を可能にするのと同時に、論理と計算の関係を与え、定理証明器にも使われます。言語理論は有限オートマトンという道具を使って文字列の解析や検索問題を効率よく解く方法を与えました。今ではプログラミング言語やウェブプログラミングに広く使われています。それ以外にも、計算機や計算の理解を理論の方から深めていく研究が数多くあります。

流体力学とナヴィエ・ストークス方程式の数理



2次元ナヴィエ・ストークス方程式の解の渦度の等高線

流体力学は水や空気のような流体の運動を研究する学問であり、大気や海洋、或は宇宙といった大きなスケールからプランクトンの引き起こす流れのような小さなスケールまで幅広い問題を研究対象にしています。数学的には流体の運動を記述する偏微分方程式であるナヴィエ・ストークス方程式やそこから派生する様々な力学系をいろいろな角度から解析することが研究の内容になっています。変形をしながら動くという流体の特徴から、その運動を記述する方程式系は本質的に非線形です。一方、流体のもつ粘性（粘っこさ）は調和関数の解をもたらします。非線形性と調和性がせめぎあいを起こすのが流体力学の特徴です。